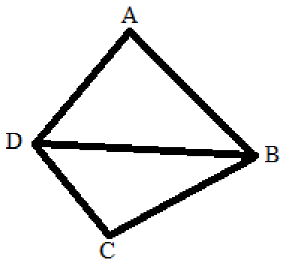
II Областная математическая олимпиада на приз Губернатора области

Решения отборочного этапа

6 класс

1. На карте обозначены 4 деревни: A, B, C, D, соединенные тропинками (см. рисунок).



В справочнике написано, что на маршрутах A-B-C и B-C-D по 10 колдобин, на маршруте A-B-D - 22 колдобины, а на маршруте A- D- B - 45 колдобин. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо идти? Докажите, что на указанном Вами маршруте действительно меньше всего колдобин.

Решение.

Есть всего три пути из A в D, не проходящие по одной дороге дважды: A-B-D, A-D, A-B-C-D. На A-B-D 22 колдобины, наA- D- B 45 колдобин, при этом на B-D не более 22 колдобин, а значит, на A-D- не менее 23. На A-B-C и B-C-D по 10 колдобин, следовательно, на A-B-C-D – не более 20. Таким образом, на A-B-C-D меньше колдобин, чем на A-D и на A-B-D.

Ответ: A-B-C-D.

2. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

Решение.

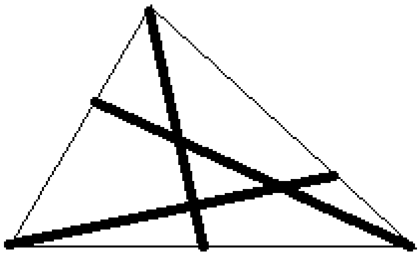
После каждой операции изменяется четность общего количества двоек и троек в разложении на простые множители числа на доске. В начале это количество нечетно: $12 = 2\cdot 2\cdot 3$. Поэтому через 60 операций оно должно быть нечетным, но в разложении числа 54 три тройки и одна двойка.

3. В лесу, состоящем из дубов и елок, компания «Пень-Инвест» вырубила одну треть всех дубов и одну шестую всех елок. Докажите, что отчет экологической организации «Зеленый мститель», утверждающий, что была вырублена половина всех деревьев, содержит неверные данные.

Решение.

В лесу вырубили менее половины дубов и менее половины ёлок. Значит, вырублено менее половины деревьев.

4. Большой треугольник разбит тремя жирными отрезками на 4 треугольника и 3 четырёхугольника (см.рисунок).



Сумма периметров четырёхугольников равна 25 см. Сумма периметров треугольников (исключая большой) равна 20 см. Периметр большого треугольника равен 19 см. Найдите сумму длин жирных отрезков. Приведите полное решение.

Решение.

Сумма периметров всех треугольников и четырёхугольников равна периметру большого треугольника плюс удвоенная сумма длин жирных отрезков. Значит, 20 + 25 = 19 + 2x, где x – сумма длин жирных отрезков. Значит, x = 13.

Ответ: 13.

5. Докажите, что $\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}+\cdots+\frac{1}{2016}>\frac{1}{2}$.

Решение.

В левой части неравенства стоит сумма 1008 слагаемых. Заметим, что $\frac{1}{1009}>\frac{1}{2016}$, $\frac{1}{1010}>\frac{1}{2016},\ldots,\frac{1}{2015}>\frac{1}{2016}$, следовательно, $\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}+\cdots+\frac{1}{2016}>\frac{1}{2016}+\frac{1}{2016}+\cdots+\frac{1}{2016}=\frac{1008}{2016}=\frac{1}{2}$.

6. При полной заправке топливом моторная лодка проплывает 40 км против течения или по течению 60 км. Какое наибольшее расстояние моторная лодка может проплыть по реке, если бензина должно хватить и на обратную дорогу в точку отправления?

Решение.

Поскольку полного бака хватает на 40 км против течения, то на 1км против течения она истратит 1/40 часть бензина. Аналогично, если лодка проплывет 1км по течению с включенным мотором, то истратит 1/60 часть бензина.

1 случай: Пусть лодка проплыла по течению S км. Тогда на это она потратила $S\cdot\frac{1}{60}$ часть бензина (если плыла с включенным мотором), а на обратный путь против течения она потратила $S\cdot\frac{1}{40}$ часть бензина. Всего она потратила $S\cdot\frac{1}{60}+S\cdot\frac{1}{40}=1$, что составляет полный бензобак, то есть 1.

$S\cdot\frac{1}{60}+S\cdot\frac{1}{40}=1,$

$S\cdot\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{40}\right)=1,$

$S\cdot\frac{5}{120}=1,$

$S=24.$

2 случай: Лодка может плыть по течению со скоростью течения (с выключенным двигателем) и не тратить бензин. Тогда бензин ей будет нужен только на путь против течения, т.е на 40 км, а обратно он пойдёт по течению со скоростью течения.

Ответ: 40 км в одну сторону.

Комментарий к решению.Если дан ответ 24 км (48 км), то 5 баллов, если рассмотрен только второй случай, то 2 балла.

7. Петя и Коля копили монеты достоинством в 1, 2, 5 рублей, причем оказалось, что в Петиной копилке нет монет того же достоинства, что в Колиной. Могут ли ребята заплатить по 2018 рублей из своих копилок одинаковым числом монет? (Объясните свой ответ)

   Решение.

   Предположим, что ребята могут заплатить из своих копилок по 2018 рублей из своих копилок одинаковым числом монет. Тогда у кого-то из ребят будут монеты только одного достоинства. Если у кого-то в копилке есть монеты достоинством в 5 рублей, то у него должны быть и монеты другого достоинства, так как 2018 на 5 не делится. Также не может быть варианта, что у кого-то есть монеты достоинством только в 1 рубль. В этом случае, чтобы набрать 2018 рублей, потребуется 2018 монет. Но в этом случае 2018 монет другого достоинства в сумме составят больше 2018 рублей. Значит у кого-то в копилке только монеты достоинством 2 рубля (пусть для определенности у Пети). Тогда у Коли в копилке должны быть монеты достоинством в 5 рублей и в 1рубль. Чтобы набрать 2006 рублей, Пете потребуется ровно 1009 монет. Однако Коля не сможет набрать 2018 рублей при помощи 1009 монет достоинством в 1 или 5 рублей, так как нечетное количество (1009) нечетных чисел (1 и 5) в сумме дают нечетное число, а 2018 – четное число.

   Ответ: не могут.

7 класс.

1. Найдите все тройки простых чисел x, y, z, такие, что 19x+yz=1995.

   Решение.

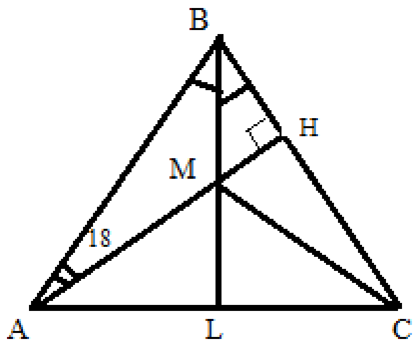
   19x+yz=1995,
   19x-1995=yz,
   19(x-105)=yz.

   Так как y,z – простые, то одно из них 19, а другое - (x-105). Пусть y=19. Следовательно, x-105=-z. Поскольку x,z – простые, а их разность нечетное число, то z=2. Откуда получаем x=107.

   Ответ: x=107, y=19, z=2.

2. Высота AH и биссектриса BL треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что угол BAH равен 18 градусов, а угол BCA – 54 градуса. Найти угол ACM.

   Решение.



Из ΔAHB: $\angle ABH=90^0 - \angle BAH=72°$. Поэтому в треугольнике ABC

$\angle A=180° - \angle B - \angle C=180°-72°-54°=54°$. То есть, $\angle A=\angle C$. Таким образом, ΔABC – равнобедренный, т.е. BL –серединный перпендикуляр к отрезку AC. Значит, MC=MA и $\angle ACM=\angle CAM=54^0 – 18^0 =36°$.

Ответ: 36^0

3. Можно ли разлить 50л бензина по трем бакам так, чтобы в первом баке было на 10л больше, чем во втором, а после переливания 26л из первого бака в третий в третьем баке стало столько же, сколько во втором?

Решение.

Из второго условия следует, что в каждом из двух баков – первом и втором должно быть не меньше 26л бензина. Действительно, поскольку из первого бака можно перелить 26л, то, очевидно, изначально в нем должно быть не меньше 26л. Кроме того, после такого переливания в 3-ем баке будет не меньше 26л, а по условию это столько же, сколько во втором. Поэтому общий объем бензина в двух первых баках должен быть не меньше 52л. Противоречие, так как в трех баках вместе 50л.

Ответ: нельзя.

4. Папа дал Маше денег на 30 тетрадей. В магазине в обмен на чек о покупке 20 тетрадей возвращают 25% стоимости, а в обмен на чек о покупке 5 тетрадей 10%. Какое наибольшее число тетрадей может купить Маша?

Решение.

Для получения максимальной скидки Маша должна действовать так: 1. Пока хватает денег, покупать набор из 20 тетрадей и сразу обменивать чек на выходе; 2. Если не хватает денег на 20тетрадей, но хватает на 5, покупать набор из 5 тетрадей и сразу обменивать чеки на выходе; 3. В крайнем случае - покупать отдельные тетради. Действуя таким образом, Маша сначала купит 20 тетрадей и получит на выходе из магазина стоимость 5 тетрадей. После этого у нее будет денег на 15 тетрадей. Потом она купит три набора из 5 тетрадей и получит на выходе стоимость 1, 5 тетрадей. На оставшиеся деньги она купит 1тетрадь. Итого: 36тетрадей.

Ответ: 36 тетрадей.

5. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

Решение.

После каждой операции изменяется четность общего количества двоек и троек в разложении на простые множители числа на доске. Вначале это количество нечетно: 12= $2 \cdot 2 \cdot 3$. Поэтому через 60 операций оно должно быть нечетным, но в разложении числа 54 три тройки и одна двойка.

6. Какую цифру надо поставить вместо * в числе 666…666*555…555 (цифры 6 и 5 выписаны по 50 раз), чтобы получившееся число делилось на 7?

Решение.

666…666*555…555$= 5 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{50} + * \cdot 10^{50} + 6 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{50} \cdot 10^{51} = 5 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{48} + 5 \cdot 11 \cdot 10^{48} + * \cdot 10^{50} + 6 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{48} \cdot 10^{53} + 6 \cdot 11 \cdot 10^{51} = 5 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{48} + 6 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{48} \cdot 10^{53} + \overline{66 * 55} \cdot 10^{48}$. Заметим, что число 111111 делится на 7, значит, и число$\underbrace{11\ldots1}_{48}$ также делится на 7, следовательно, число $5 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{48} + 6 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{48} \cdot 10^{53}$ делится на 7. Тогда, чтобы исходное число делилось на 7 нужно, чтобы на 7 делилось число $\overline{66*55}$. Определяем, что подходят числа 66255 и 66955.

Ответ: 2, 9.

7. В комнате собрались 12 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец. Который всегда лжет. Их пронумеровали числами от 1 до 12. Первый сказал: «Все люди, находящиеся в этой комнате с номерами делящимися на 2, лжецы» Второй сказал: «Все люди, находящиеся в этой комнате с номерами делящимися на 3, лжецы» и т.д. Одиннадцатый сказал: «Все люди, находящиеся в этой комнате с номерами делящимися на 12, лжецы» Двенадцатый в отличие от предыдущих промолчал. Сколько лжецов в комнате?

Решение:

Заметим, что любой человек с номером 6 и более обвиняет во лжи только следующего по номеру человека. Значит, люди с номерами 7,9,11 принадлежат к одному типу (назовем его первым). А люди с номерами 6, 8 ,10,12 – к другому типу (назовем его вторым). Тогда человек с номером 5 также принадлежит к первому типу, т.к. обвиняет во лжи 6 и 12 человек. Человек с номером 4 утверждает, что 5 и 10 лжецы. Это утверждение не может быть верно, значит он гарантированный лжец. Человек с номером 3 обвиняет во лжи 4, 8, 12 человек, значит он человек первого типа. Аналогично, человек номер 2 - лжец, человек номер 1 –первого типа. Таким образом, мы получили двух гарантированных лжецов, шестерых человек первого типа и четверых – второго. Если первый тип – лжецы, а второй – рыцари, то мы получим 8 лжецов и 4 рыцаря, если наоборот, то получим и рыцарей и лжецов по 6 человек.

Ответ: 6 или 8

8. В ящике лежат синие, красные, белые и черные шарики, по 20 штук каждого цвета. Какое минимальное количество шариков нужно вытащить, чтобы среди них точно нашлись две группы по 6 шариков, причем в каждой группе шарики одного цвета?

Решение.

35 шариков может быть недостаточно, т.к. можно вытащить, например, 20 синих, 5 красных, 5 белых и 5 черных. 36 точно хватит, т.к. чтобы не было двух групп по 6 шариков самое большее можно вытащить: по 5 шариков трех цветов и 20 шариков четвертого цвета. То есть всего 35 шариков.

Ответ: 36.

8 класс.

1. Василий Петров выполняет задание по английскому языку. В этом задании есть 10 английских выражений и их переводы на русский в случайном порядке. Нужно установить верные соответствия между выражениями и их переводами. За каждое правильно установленное соответствие даётся 1 балл. Таким образом, можно получить от 0 до 10 баллов. Вася ничего не знает, поэтому выбирает варианты наугад. Найдите вероятность того, что он получит ровно 9 баллов.

Решение.

Если угадано девять верных ответов, то десятый тоже будет верным. Значит, искомая вероятность равна нулю.

Ответ: 0.

2. Если к числу 200 прибавить натуральное число А, то получится квадрат некоторого натурального числа. Если к числу 276 прибавить А, то так же получится квадрат натурального числа. Найдите число А.

Решение.

Условие задачи можно записать в виде системы:

$\begin{cases} \mathrm{A} + 200 = \mathrm{x}^2 \\ \mathrm{A} + 276 = y^2 \end{cases}$. Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим $y^2 - x^2 = 76$, которое равносильно $(x - y) \cdot (x + y) = 76$.Так как 76=1·2·2·19, то решение последнего уравнения будем искать как решение систем: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 76 \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = 76 \\ x + y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 38 \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = 38 \\ x + y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 19 \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = 19 \\ x + y = 4 \end{cases}$ в натуральных числах. Получим, что x=18,y=20.

Ответ: (18, 20).

3. Расположите числа 1^{888}, $2^{777}, 3^{666}, 4^{555}, 5^{444}, 6^{333}, 7^{222}, 8^{111}$ в возрастающем порядке.

Решение.

Заметим, что$2^{777} = (2^7)^{111} = 128^{111}, 3^{666} = 729^{111}$, $4^{555} = 1024^{111}$, $5^{444} = 625^{111}$, $6^{333} = 216^{111}, 7^{222} = 49^{\,111}, 1^{888} = 1$. Тогда получаем ответ: 1^{888}, $8^{111}, 7^{222}$, 2^{777}, 6^{333}, 5^{444}, 3^{666},4^{555}.

4. Какую цифру надо поставить вместо * в числе 666…666*555…555 (цифры 6 и 5 выписаны по 50 раз), чтобы получившееся число делилось на 7?

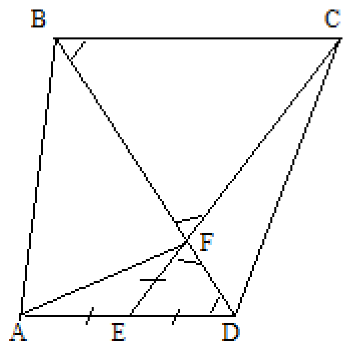
Решение.

666…666*555…555= $5 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{50} + * \cdot 10^{50} + 6 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{50} \cdot 10^{51} = 5 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{48} + 5 \cdot 11 \cdot 10^{48} + * \cdot 10^{50} + 6 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{48} \cdot 10^{53} + 6 \cdot 11 \cdot 10^{51} = 5 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{48} + 6 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{48} \cdot 10^{53} + \overline{66 * 55} \cdot 10^{48}$. Заметим, что число 111111 делится на 7, значит, и число$\underbrace{11 \ldots 1}_{48}$ также делится на 7, следовательно, число $5 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{48} + 6 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{48} \cdot 10^{53}$ делится на 7. Тогда, чтобы исходное число делилось на 7 нужно, чтобы на 7 делилось число $\overline{66 * 55}$. Определяем, что подходят числа 66255 и 66955.

Ответ: 2, 9.

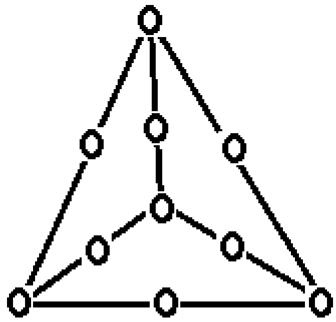
5. Точка Е-середина основания AD трапеции ABCD. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Известно, что AF перпендикулярен BD. Докажите, что BC=FC.

Решение.



По свойству медианы прямоугольного треугольника EF=ED,следовательно, угол EDF равен углу EFD. Заметим, что углы EDF и FBC равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC, углы EFD и BFC равны как вертикальные. Таким образом, в треугольнике BFC углы B и F равны, значит, BC=CF.

6. Можно ли в кружочках расставить все целые числа от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел, вдоль любого из шести отрезков была одной и той же?



Решение.

Допустим, что возможно. Пусть сумма чисел, стоящих на концах отрезков, равна A, сумма чисел, расположенных в серединах отрезков, равна B, а сумма трех чисел вдоль каждого отрезка равна C. Тогда A+B=0+1+…+9=45. Каждая концевая точка принадлежит ровно трем отрезкам, а все середины различны. Поэтому, сложив суммы вдоль всех шести отрезков, получим 3A+B=6C. Отсюда A=6C-(A+B)=6C-45. Но это невозможно, так как 2A – четное число, а 6C-45 – нечетное. Полученное противоречие доказывает, что требуемая расстановка невозможна.

Ответ: нельзя.

7. Саша, Лёша и Коля одновременно стартуют в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

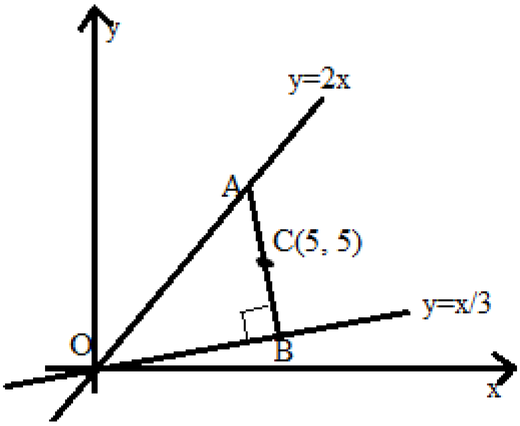
Решение.

Скорость Коли составляет 0,9 от скорости Лёши. В момент, когда Саша финишировал, Лёша пробежал 90 м, а Коля $0{,}9 \cdot 90 = 81$ м. Следовательно, расстояние между Сашей и Колей было 19 м.

Ответ: 19 м.

9 класс.

1. Найдите площадь прямоугольного треугольника OAB, изображенного на рисунке.



Решение.

Уравнение прямой AB: y= -3x+d. Так как точка C принадлежит AB, то определяем d из условия: 5=-3·5+d, d=20.

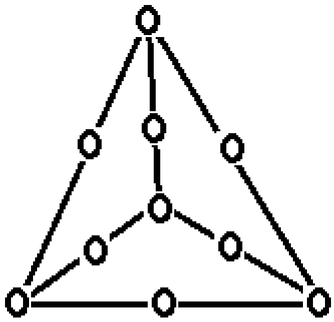
Найдем координаты точки B (точка в принадлежит прямой AB и прямой OB): $\begin{cases} y = \frac{x}{3} \\ y = -3x + 20 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$.

Найдем координаты точки A (A принадлежит прямой AB и прямой OA): $\begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 20 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$.

Найдем длину отрезка AB=$\sqrt{(6-4)^2 + (2-8)^2} = 2\sqrt{10}$. Длина OB= $\sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$. Тогда площадь прямоугольного треугольника OAB равна 20.

Ответ: 20.

2. Можно ли в кружочках расставить все целые числа от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел, вдоль любого из шести отрезков была одной и той же?



Решение.

Допустим, что возможно. Пусть сумма чисел, стоящих на концах отрезков, равна A, сумма чисел, расположенных в серединах отрезков, равна B, а сумма трех чисел вдоль каждого отрезка равна C. Тогда A+B=0+1+…+9=45. Каждая концевая точка принадлежит ровно трем отрезкам, а все середины различны. Поэтому, сложив суммы вдоль всех шести отрезков, получим 3A+B=6C. Отсюда A=6C-(A+B)=6C-45. Но это невозможно, так как 2A – четное число, а 6C-45 – нечетное. Полученное противоречие доказывает, что требуемая расстановка невозможна.

Ответ: нельзя.

3. В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих с разными обязанностями. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна 3/25. Сколько в классе девочек?

Решение. Пусть в классе n мальчиков, тогда число способов выбрать из них упорядоченную пару дежурных равно n(n – 1), число способов выбрать упорядоченную пару из всего классе равно 25·24. Поэтому вероятность того, что будут выбраны два мальчика, равна n(n – 1) : (25·24) = 3/25. Отсюда n(n – 1) = 72 = 9·8. Следовательно, n = 9, то есть в классе 9 мальчиков и 16 девочек.

Ответ: 16 девочек

4. Если n $\in N$. Докажите, что (n+2)(n+1)n (n-1) +1 – квадрат целого числа.

Решение.

$(n+2)(n+1)n(n-1)+1=(n^2+2n)(n+1)(n-1)+1=(n^2+2n)(n^2-1^2)+1=n^4-n^2+2n^3-2n+1=(n^2+n-1)^2$

5. Вычислите $\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\cdots+\frac{2014+2015}{2016}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}$.

Решение.

Заметим, что каждое слагаемое в первой скобке имеет вид: $\frac{(3n-2)+(3n-1)}{3n}=2-\frac{1}{n}$, где n=1, 2, …, 672. Тогда $\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\cdots+\frac{2014+2015}{2016}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=(2-1)+\left(2-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(2-\frac{1}{672}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=2\cdot 672=1344.$

Ответ: 1344.

6. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?

Решение.

Гномы, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а гномы, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 16 рук (10+5+1). Если бы все гномы сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого гнома заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 гномов солгали, а 4 сказали правду.

Ответ: 4.

7. Если к числу 200 прибавить натуральное число А, то получится квадрат некоторого натурального числа. Если к числу 276 прибавить А, то так же получится квадрат натурального числа. Найдите число А.

Решение.

Условие задачи можно записать в виде системы:

$\begin{cases} A+200=x^2 \\ A+276=y^2 \end{cases}$. Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим $y^2-x^2=76$, которое равносильно $(x-y)\cdot(x+y)=76$. Так как 76=1·2·2·19, то решение последнего уравнения будем искать как решение систем: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=76 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=76 \\ x+y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=38 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=38 \\ x+y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=19 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=19 \\ x+y=4 \end{cases}$ в натуральных числах. Получим, что x=18,y=20 .

Ответ: (18, 20).

10 класс.

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 42. Сумма квадратов этой же последовательности равна 1092. Найти эти три члена изначальной последовательности.

Решение.

Пусть x – первый член геометрической прогрессии, q- знаменатель прогрессии. Тогда можно составить систему: $\begin{cases} x+xq+xq^2=42 \\ x^2+(xq)^2+(xq^2)^2=1092 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x(1-q^3)}{1-q}=42 \\ \frac{x^2(1-q^6)}{1-q^2}=1092 \end{cases}$,. $\begin{cases} \frac{x^2(1-q^3)^2}{(1-q)^2}=42^2 \\ \frac{x^2(1-q^6)}{1-q^2}=1092 \end{cases}$. Разделим второе уравнение системы на первое: $\frac{1-q+q^2}{1+q+q^2}=\frac{13}{21}$. Решая последнее уравнение, находим q=4, q=1/4. Определяем соответствующие им x= 2, x=32.

Ответ: 2, 8, 32; 32, 8, 2.

2. Если $n \in N$. Докажите, что (n+2)(n+1) n (n-1) +1 – квадрат целого числа.

Решение.

$(n+2)(n+1)n(n-1)+1=(n^2+2n)(n+1)(n-1)+1=(n^2+2n)(n^2-1^2)+1=n^4-n^2+2n^3-2n+1=(n^2+n-1)^2$

3. В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих с разными обязанностями. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна 3/25. Сколько в классе девочек?

Решение.

Пусть в классе n мальчиков, тогда число способов выбрать из них упорядоченную пару дежурных равно n(n – 1), число способов выбрать упорядоченную пару из всего классе равно 25·24. Поэтому вероятность того, что будут выбраны два мальчика, равна n(n – 1) : (25·24) = 3/25. Отсюда n(n – 1) = 72 = 9·8. Следовательно, n = 9, то есть в классе 9 мальчиков и 16 девочек.

Ответ: 16 девочек

4. Дан треугольник ABC с углом BAC, равным 24^0, на сторонах AB и AC взяты точки M и P соответственно. При этом окружность с центром в P , проходящая через A, проходит также через M, а окружность с центром в M, проходящая через B, проходит также через C и P. Найдите угол ABC.

Решение.

Заметим, что AP = MP , так как M лежит на окружности с центром в P , проходящей через A. Тогда $\triangle$APM является равнобедренным, и $\angle$AMP = $\angle$MAP = 24^o. Поскольку $\angle$MPC внешний для треугольника AMP , то $\angle$MPC = $\angle$AMP + $\angle$MAP = 48^o. Точки P ,C, B лежат на окружности с центром в M, поэтому MP = MC = MB, треугольники PMC и BMC являются равнобедренными. Значит, $\angle$MCP = $\angle$MPC = 48^o, $\angle$MCB = $\angle$ABC. Сумма углов в треугольнике ABC должна быть равна 180◦, поэтому 180^o= $\angle$BAC + $\angle$MCP + $\angle$MCB + $\angle$ABC = 24^o+ 48^o+ 2$\angle$ABC. Отсюда получаем, что 2$\angle$ABC =180^o – 24^o – 48^o= 108^o, тем самым $\angle$ABC = 54^o

Ответ: 54^0.

5. Вычислите $\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\cdots+\frac{2014+2015}{2016}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}$.

Решение.

Заметим, что каждое слагаемое в первой скобке имеет вид: $\frac{(3n-2)+(3n-1)}{3n}=2-\frac{1}{n}$, где n=1, 2, …, 672. Тогда $\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\cdots+\frac{2014+2015}{2016}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=(2-1)+\left(2-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(2-\frac{1}{672}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=2\cdot 672=1344.$

Ответ: 1344.

6. Если число 100^{10}записать в виде суммы десяток (10+10+10+…+10), то сколько получится слагаемых?

Решение.

100^{10} = 10^{20} = 10· 10^{19} . Значит, всего будет 10^{19} слагаемых.

Ответ: 10^{19}.

7. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?

Решение.

Гномы, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а гномы, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 16 рук (10+5+1). Если бы все гномы сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого гнома заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 гномов солгали, а 4 сказали правду.

Ответ: 4.