Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

6 КЛАСС

1. Можно ли в равенстве $2 \times 3 \times 2 + 3 \times 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 3 + 4 \times 3 \times 2$ расставить скобки так, чтобы оно стало верным?

2. Девочка говорит неправду по понедельникам, а правду говорит по пятницам и субботам. Шесть дней подряд её просили назвать своё имя. Она дала следующие ответы: Ира, Инга, Ира, Инна, Инга, Инна. Как зовут девочку?

3. В каком отношении надо смешать 10%-ный и 20%-ный растворы поваренной соли, чтобы в их смеси получился 16%-ный раствор?

4. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 6 различных цветов? Различными считаются окраски, которые не совмещаются при вращении.

5. У мальчика было много яблок, и он решил отдать их своим друзьям. Когда друзья пришли, он распределил яблоки между ними, причем всем досталось поровну. Неожиданно подошел ещё один друг, яблоки пришлось перераспределить, и опять всем досталось поровну, но теперь на 15 штук меньше, чем в прошлый раз. Когда подошел ещё один друг, яблоки снова перераспределили, опять всем досталось поровну, но в этот раз ещё на 9 штук меньше. Что произойдёт, если явится ещё один друг? Достанется ли снова всем поровну яблок, и если да, то на сколько меньше, чем в предыдущий раз?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

7 КЛАСС

1. Школьник отвечает на вопросы теста с четырьмя вариантами: A, B, C, D. Ему дают 4 подсказки:

   1) Правильный ответ A или B.

   2) Правильный ответ C или D.

   3) Правильный ответ B.

   4) Ответ D неправильный.

   Известно, что три подсказки ошибочны, и только одна правильная. Какой вариант ответа правильный?

2. На вечеринке среди присутствовавших было более 45% юношей и более 50% девушек. Каково минимально возможное число участников вечеринки?

3. Можно ли число 100 представить в виде 9 натуральных слагаемых, среди которых ни одно не делится нацело ни на какое другое?

4. Таблица $n \times n$ называется латинским квадратом, если в её строках и столбцах ровно по разу встречается каждое число от 1 до n. Найти число латинских квадратов при $n = 4$. Квадраты считаются одинаковыми только в том случае, если они заполнены совершенно идентично; симметрия при этом не учитывается.

5. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $m \times n$. В нём отмечены узлы сетки. Какое наибольшее количество узлов можно выбрать, чтобы никакие три выбранные точки не являлись вершинами прямоугольного треугольника?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

8 КЛАСС

1. Сколькими способами можно расставить по одному все натуральные числа от 1 до 9 в клетки таблицы 3×3, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце оказались нечётны? (Таблица не вращается и не переворачивается.)

2. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Какой из отрезков BF и BE длиннее?

3. Каково минимальное значение выражения $pq + rs + uvw + xyz$, где вместо букв должны стоять цифры от 0 до 9 по одному разу каждая?

4. Решить уравнение: $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt{x-2} = 1$.

5. 20 теннисистов устроили между собой соревнование из 14 игр. В каждой игре участвует 2 человека, и каждый из этой компании теннисистов принял участие хотя бы в одной игре. Доказать, что в некоторых 6 играх участвовало 12 различных теннисистов.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

9 КЛАСС

1. Дана таблица 9×9, частично заполненная "крестиками". Можно ли покрыть все "крестики"без наложений при помощи "уголков", то есть фигурок из трёх клеток, получаемых из квадрата 2×2 удалением одной клетки? При этом выходить за пределы "крестиков"нельзя.

								x
							x	x
						x	x	x
					x	x	x	x
				x	x	x	x	x
			x	x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x

2. Решить уравнение $[\frac{2x-1}{3}] = \frac{x+5}{2}$, где квадратные скобки означают целую часть числа.

3. В равнобедренном треугольнике ABC величина каждого из углов измеряется не целым числом градусов. Известно, что через одну из вершин треугольника ABC можно провести прямую, разбивающую его на два равнобедренных треугольника. Какие значения могут принимать углы треугольника ?

4. Доказать неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ для любых действительных чисел. При каких значениях имеет место равенство?

5. В волейбольном турнире участвовало n команд высшей лиги и $2n$ команд первой лиги. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой; ничьих в турнире не было. Отношение числа побед, одержанных командами первой лиги, к числу побед, одержанных командами высшей лиги, равно $5 : 7$. Какое число команд участвовало в турнире?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

10 КЛАСС

1. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)

2. Дан квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - x + c$ такой, что уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет решений. Доказать, что $ac > 1$.

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, диагональ AC которого имеет длину 10 и является биссектрисой угла при вершине A. Какую максимальную площадь может иметь этот четырёхугольник?

4. Доказать, что количество способов представить число 800 в виде суммы 299 натуральных слагаемых, не превосходящих 200, равно количеству способов представить число 700 в виде суммы 199 натуральных слагаемых, не превосходящих 300. Способы, отличающиеся порядком следования слагаемых, считаются одинаковыми.

5. Даны три целых числа. Известно, что их сумма равна трём, и сумма кубов тоже равна трём. Чему могут быть равны сами эти числа? Описать все случаи.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для решения задачи, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и плохо поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Многие задачи данного тура близки к типовым школьным задачам, поэтому их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Конкретные предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В задаче 1 VI класса достаточно предъявить верный итог. Само равенство, если оно справедливо, легко проверяется. Способ расстановки скобок может отличаться от авторского.

В задаче 2 VI и в задаче 1 VII класса достаточно полного логического разбора нескольких случаев. Верный ответ без обоснования может быть оценён только 1 баллом.

В задаче 4 VI класса за верный ответ можно присуждать 2 балла. Для большего количества требуется точное обоснование. Можно также давать 1-2 балла за принципиально верный способ подсчёта, осуществлённый с ошибками.

В задаче 5 VI класса за верно составленные уравнения можно давать до 3 баллов. Если задача решена не до конца, то есть не дан ответ на вопрос, но найдено общее количество яблок и число друзей, то можно присудить до 5 баллов.

В задаче 2 VII класса за верно составленные неравенства даётся до 2 баллов.

В задаче 3 VII класса достаточно верно найденного примера (не обязательно такого, как в решении).

В задаче 4 VII класса за верно найденный ответ даётся 2 балла. При верном общем принципе подсчёта с наличием арифметических ошибок – до 4 баллов.

В задаче 5 VII класса за построение примера из нужного количества узлов даётся 3 балла. За доказательство оптимальности – 4 балла.

В задаче 1 VIII класса верный ответ может быть оценён 2 баллами.

В задаче 2 VIII класса возможна верная идея решения (сравнение сторон и углов), но с путаницей в окончательном ответе. За это можно давать до 5 баллов.

В задаче 3 VIII класса за верный ответ с примером даётся 3 балла. Если перебор вариантов осуществлён недостаточно полно и ясно, можно вычесть 1-2 балла.

В задаче 5 VIII класса можно давать до 2 баллов за получение более слабого результата в нужном направлении (скажем, наличия как минимум 5 игр с разными участниками). Если вывод сделан на основании не доказанного предположения для меньшего числа участников, но сам ход мысли верный, присуждается до 3 баллов.

В задаче 1 IX класса достаточно верно предъявленного примера.

В задаче 3 IX класса за частичный анализ случаев можно присуждать до 2 баллов за один из трёх случаев.

В задаче 4 IX класса за верное доказательство неравенства без анализа случая равенства можно давать 5 баллов.

В задаче 5 IX класса частичные баллы могут присуждаться за верное составление отдельных уравнений. Точные указания по поводу этой задачи, учитывающие все возможные продвижения в решении, дать достаточно трудно.

В задаче 1 X класса за верно найденные варианты в колиечестве 10 можно давать до 3 баллов. Остальное зависит от полноты сделанного анализа всех вариантов.

В задаче 4 X класса за попытку геометрической интерпретации можно давать до 3 баллов. Хотя там применение геометрии не обязательно.

В задаче 5 X класса за верный ответ без обоснования того, что других решений нет, присуждается 1 балл.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

6 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

$$2 \times (3 \times 2 + 3 \times 4) \times 3 = 3 \times (2 \times 3 + 4 \times 3) \times 2$$

2. Ответ: Инна.

   Поскольку два одинаковых имени подряд не звучало, опрос не мог затронуть и пятницу, и субботу. Значит, он начался либо в субботу (и тогда не захватил пятницу), либо в воскресенье (без участия субботы). В первом случае ответы субботы и понедельника (первый и третий) совпали, чего быть не могло. Значит, опрос начался в воскресенье, и тогда правда была сказана в пятницу, то есть в последний из дней опроса. Это имя Инна. В понедельник же девочка сказала неправду, назвав себя Ингой.

3. Ответ: в отношении 2 : 3.

   Пусть взято x литров первого и y литров второго раствора. Тогда концентрация соли в смеси равна $\frac{0{,}1x+0{,}2y}{x+y} = \frac{16}{100}$. По правилу пропорции, $10x+20y = 16x+16y$, откуда $4y = 6x$, то есть $x : y = 2 : 3$.

4. Ответ: 30.

   Один из цветов, который мы сами фиксируем (скажем, красный, или цвет номер один) можно считать находящимся сверху. Напротив него снизу находится один из пяти цветов, что даёт 5 разных способов его выбрать. По бокам тогда оказываются грани четырёх цветов, и куб можно повернуть так, чтобы напротив нас оказалась грань какого-то заданного цвета (например, имеющего наименьший номер среди цветов боковых граней). Тогда всё остальное раскрашивается $3! = 6$ способами, по числу перестановок. Все эти раскраски будут отличаться друг от друга, если рассматривать только вращения. По правилу произведения, это даёт ответ 30.

5. Ответ: да, достанется поровну, на 6 яблок меньше.

   Пусть n друзей пришло в начале, и по m яблок было выдано в конце. Тогда $n(m + 24) = (n + 1)(m + 9) = (n + 2)m$. Сравнение первого с последним даёт

$m = 12n$. Сравнение второго с третьим даёт $m = 9n + 9$, откуда $n = 3$, $m = 36$. Яблок было 180, друзей в конце пришло 5.

Если придёт новый друг, то на 6 человек яблок снова придётся поровну – по 30 штук. Это на 6 меньше, чем было в предыдущий раз.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: правильный ответ D.

   Допустим, что D – это неправильный ответ. Тогда подсказка 4 верна. Значит, остальные подсказки ошибочны. Но это противоречит тому, что говорит подсказка номер 2, утверждающая, что правильный ответ есть C или D.

   Таким образом, ответ D должен быть правильным, если в условии задачи нет противоречия. Но его нет, так как при правильном ответе D подсказка 2 верна, а остальные три неверны.

2. Ответ: 11.

   Пусть юношей было m, а девушек n. По условию, $n > m$. Далее, $\frac{m}{m+n} > \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, откуда $20m > 9m + 9n$, то есть $11m > 9n$. Отсюда следует, что $11m \geq 9n + 1 \geq 9(m+1) + 1 = 9m + 10$. Поэтому $m \geq 5$ и $n \geq 6$, а всего участников не меньше 11. Ясно, что при $m = 5$, $n = 6$ все условия выполнены.

3. Ответ: да, можно.

   Достаточно взять сумму первых 9 простых чисел. Она в точности равна 100. Это $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23$.

4. Ответ: 576.

   Первую строку образуют символы 1, 2, 3, 4 в каком-то порядке. Переставим столбцы так, чтобы они шли подряд. Свойство квадрата быть латинским от этого не меняется, и этим мы уменьшим число способов заполнения квадрата в $4! = 24$ раза. В клетках первого столбца стоят числа 2, 3, 4, и их также можно расположить по порядку, меняя очерёдность строк. При этом мы дополнительно уменьшаем число вариантов в $3! = 6$ раз.

   Далее можно непосредственно подсчитать, сколько вариантов осталось. Рассматривая число на пересечени второй строки и второго столбца, мы рассматриваем три случая, когда оно равно 3, 4 или 1 соответственно. Это приводит к следующим трём таблицам:

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4		
4	3		

где последнюю из таблиц можно заполнить числами 1, 2 двумя способами. Итого получается 4 варианта, и это количество надо умножить на те коэффициенты, которые получались при занижении общего числа способов. В итоге будет $24 \cdot 6 \cdot 4 = 24^2 = 576$.

5. Ответ: $m+n$.

   Выберем все узлы, выходящие на левый край, кроме самого верхнего. Этих узлов будет выбрано m. Также выберем все узлы, выходящие на верхний край, кроме самого левого. Здесь будет выбрано n точек, и всего их стало $m+n$. Очевидно, что все треугольники с вершинами в выбранных точках будут тупоугольными.

   Теперь покажем, что большее количество узлов выбрать нельзя. Рассмотрим произвольную выбранную вершину. Если на горизонтальной прямой, через неё проходящей, нет других выбранных вершин, то проведём эту прямую. В противном случае на вертикальной прямой, проходящей через данную точку, нет других выбранных узлов — иначе сразу возник бы прямоугольный треугольник. Здесь мы проводим вертикальную прямую.

   Количество проведённых прямых равно числу выбранных узлов, так как на каждой из них имеется ровно один выбранный узел. Если все горизонтальные прямые проведены, но их имеется ровно $m+1$, что не превосходит $m+n$. Ясно, что при этом через каждый выбранный узел проходит ровно одна прямая, поэтому вертикальных прямых не проведено. Аналогично получается, что если все вертикальные прямые проведены, то узлов выбрано $n+1$, то есть не больше $m+n$.

   Если же среди горизональных прямых отсутствует хотя бы одна, то их проведено не более m, а вертикальных по той же причине не более n. Всего не более $m+n$, что и требовалось доказать.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

8 класс (решения)

1. Ответ: 25920.

   В каждой строке и в каждом столбце должно оказаться нечётное число нечётных чисел. Поскольку у нас имеется ровно 5 нечётных чисел, они должны быть распределены по строкам и по столбцам в количестве 3+1+1. Это значит, что имеется одна строка и один столбец, в которых стоят нечётные числа.

   Точку пересечения строки и столбца выбираем 9 способами. Это определяем как места для расстановки нечётных чисел (5! способов, по числу перестановок), так и места для расстановки чётных чисел (4! способов). Итого по правилу произведения имеем $9 \cdot 120 \cdot 24 = 25920$ способов заполнения таблицы.

2. Ответ: BE длиннее, чем BF.

   В прямоугольном треугольнике CDE катет короче гипотенузы, поэтому $DE < DC = DA$. Тогда в треугольнике ADE против большей стороны лежит больший угол: $\angle DEA > \angle DAE$. Получается, что $\angle AEB = 90^\circ - \angle DEA < 90^\circ - \angle DAE = \angle DFA = \angle BFE$. Таким образом, угол FEB меньше BFE, и против большего из углов лежит большая сторона: $BE > BF$.

3. Ответ: 52.

   Отметим для начала следующее: если имеется четыре различных (положительных) числа, то для достижения минимального значения суммы произведений пар нужно перемножать самое маленькое с самым большим, а также два "средних". Например, для чисел 3, 4, 7, 9 соответствующее минимальное значение будет равно $3 \cdot 9 + 4 \cdot 7 = 55$. В противном случае, если группировка устроена по другому принципу, то в выражении $ab + cd$, где a – самое большое число, а b – не самое маленькое, можно считать, что $b > c$. Тогда значение выражения $ac + bd$ будет меньше. Действительно, $(ab+cd)-(ac+bd) = a(b-c)-d(b-c) = (a-d)(b-c) > 0$. Этот принцип мы будем несколько раз применять.

   Сначала убедимся в том, что цифра 0 находится в одной из троек, а не в паре. Если бы оно было в паре, то умножалось бы на цифру, не превосходящую 9. При этом в одной из троек заведомо присутствуют две цифры, произведение которых равно как минимум $3 \cdot 4 = 12$. Тогда выгодно совершить обмен, домножая 0 на большее из чисел.

Теперь, когда мы знаем, что 0 входит в тройку, мы можем сделать вывод, что вместе с ним там находятся две самые большие цифры 8 и 9. В противном случае одну из них можно обменять на 8 или 9, уменьшая общее значение суммы. Тем самым, задача свелась к минимизации выражения вида $pq + rs + uvw$ для цифр от 1 до 7.

Если допустить, что 1 входит в пару, а не в тройку, то единица домножается самое большее на 7, а в тройку при этом входят две цифры, произведение которых больше. Тогда снова возможен обмен с уменьшением. Считая, что $w = 1$, мы теперь минимизируем выражение вида $pq + rs + uv$ для цифр от 2 до 7.

Ясно, что 2 должно быть в паре с самым большим, то есть с 7. Оставшиеся цифры группируются по принципу 3 с 6, 4 с 5. Это даёт значение суммы, равное $2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 52$, и оно будет наименьшим. Самих способов группировки при это будет несколько, так как 1 можно "отдать" любому из трёх произведений.

4. Ответ: $x \in \{2; 3; 11\}$.

   Положим $y = \sqrt{x-2}$, тогда $x = y^2 + 2$. Уравнение $\sqrt[3]{3-x} = 1 - y$ возведём в куб: $3 - x = (1-y)^3 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3$, откуда с учётом предыдущего $y^3 - 4y^2 + 3y = 0$, то есть $y(y-1)(y-3) = 0$. Отсюда $y \in \{0; 1; 3\}$, и $x \in \{2; 3; 11\}$. Все три значения подходят при проверке.

5. Рассмотрим максимальное паросочетание, то есть максимально возможное число m такое, что в m играх участвовало $2m$ различных теннисистов. Очевидно, что $m \geq 1$. Предположим, что $m \leq 5$. Тогда в паросочетание не вошли $20 - 2m$ теннисистов. Из них каждый с кем-то играл, но никто не играл между собой, так как в противном случае можно сформировать ещё одну пару. Для каждого из $20 - 2m$ теннисистов рассмотрим его игру с кем-то из $2m$ участников паросочетания. Тогда все эти поединки будут попарно различными, и к ним добавятся ещё m поединков между участниками пар. Всего получится $20 - m$ игр, что не должно превосходить 14, откуда $m \geq 6$ – противоречие.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Схема приведена на рисунке.

								f
							f	f
						d	e	e
					d	d	e	c
				a	b	b	c	c
			a	a	b	8	9	9
		6	6	7	7	8	8	9
	1	2	6	7	3	4	5	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5

2. Ответ: $x \in \{17, 19, 21\}$.

   Для любого действительного числа a выполняется двойное неравенство $[a] \leq a < [a]+1$. Следовательно, $\frac{x+5}{2} \leq \frac{2x-1}{3} < \frac{x+5}{2}+1$, то есть $3x+15 \leq 4x-2 < 3x+21$, и $17 \leq x < 23$. Заметим, что число $\frac{x+5}{2}$ целое, поэтому x также целое, и оно нечётно. Этим свойством обладают числа $x = 17, 19, 21$, и все они подходят при проверке.

3. Ответ: $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{180^\circ}{7}$.

   Пусть AC – основание. Если прямая проходит через вершину B, пересекая основание в точке D, то один из треугольников разбиения имеет прямой или тупой угол в вершине D. Без ограничения общности, пусть это ADB. Тогда можно положить $\angle DAB = \angle DBA = x$. Мы также знаем, что $\angle BCD = x$ и $\angle BDC = 2x$ (внешний угол). Третий угол треугольника DBC должен быть равен x или $2x$, и тогда сумма углов треугольника ABC равна $4x$ или $5x$. Эти варианты не подходят, так как x оказывается целым числом.

   Теперь рассмотрим случай прохождения прямой через один из концов основания. Из соображений симметрии можно считать, что это точка C. Пусть тогда E — точка пересечения проведённой прямой со стороной AB. Пусть y – величина угла при основании. Понятно, что в треугольнике AEC углы при вершинах A и C не равны, поэтому возникают два варианта.

Если угол AEC равен y, то угол ACE равен $180^\circ - 2y$, и $\angle BCE = y - \angle ACE = 3y - 180^\circ$. Также ясно, что угол при вершине B составляет $180^\circ - 2y$. Тогда, поскольку угол BEC тупой, два других угла этого треугольника оказываются равны, и $180^\circ - 2y = 3y - 180^\circ$. И здесь также градусная мера угла при основании оказывается целочисленной, равной 72 градусам.

Таким образом, остаётся случай, когда в треугольнике AEC равны углы при вершинах E и C. Каждый из них равен $90^\circ - y/2$. Тогда на BCE приходится $y - (90^\circ - y/2) = 3y/2 - 90^\circ$, и эта величина должны быть равна углу при вершине B величиной $180^\circ - 2y$, так как угол при вершине E в треугольнике BEC тупой. Отсюда $3y/2 - 90^\circ = 180^\circ - 2y$, и получается $y = \frac{540^\circ}{7}$. Угол при вершине B равен $\frac{180^\circ}{7}$; все условия выполняются.

4. Выделяя полный квадрат, имеем равносильное неравенство

$$\left(a - \frac{b+c+d+e}{2}\right)^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq \frac{(b+c+d+e)^2}{4}.$$

Достаточно доказать, что $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq \frac{(b+c+d+e)^2}{4}$. Это следует из легко проверяемого неравенства $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$. Оно равносильно $(x-y)^2 \geq 0$, и равенство имеет место при $x = y$. Применяя это неравенство дважды, получаем $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq \frac{1}{2}(b+c)^2 + \frac{1}{2}(d+e)^2 \geq \frac{1}{4}(b+c+d+e)^2$, что и требовалось.

Неравенство превращается в равенство при $a = \frac{b+c+d+e}{2}$, а также при $b = c$, $d = e$, $b + c = d + e$, то есть $b = c = d = e$, $a = 2b$.

5. Ответ: 9 команд.

Общее число игр равно $3n(3n-1)/2$, оно же — общее число побед. Для команд первой и высшей лиги можно соответственно положить число побед равным $5k$ и $7k$. Это значит, что $12k = 3n(3n-1)/2$, то есть $k = n(3n-1)/8$. В частности, $n(3n-1)$ кратно восьми.

Команды первой лиги провели между собой $2n(2n-1)/2 = n(2n-1)$ игр, и в сумме одержали как минимум столько побед. Это количество не превосходит $5k$, откуда следует неравенство $n(2n-1) \leq 5n(3n-1)/8$. Сокращая на n и упрощая, приходим к $8(2n-1) \leq 5(3n-1)$, откуда $n \leq 3$. С учётом того, что $n(3n-1)$ делится на 8, подходит только $n = 3$.

Легко проверить, что турнир с такими данными возможен. Из решения ясно, что команды первой лиги выигрывали только друг у друга, и в сумме набрали $6 \cdot 5/2 = 15$ очков. А команды высшей лиги набрали в сумме 3 очка во встречах между собой, выиграв все 18 игр с командами первой лиги, то есть набрали вместе 21 очко. Отношение $15 : 21$ и есть $5 : 7$.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2015 – 2016 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: 10.

   Сумма цифр от 1 до 9 равна 45. Если мы разбиваем числа на группы, и суммы везде равны S, то S делит 45 и не равно 45. Также $S \geq 9$, так как цифра 9 входит в группу. Получается два варианта: $S = 9$ или $S = 15$.

   Если $S = 9$, то 9 идёт отдельно, 8 может входить только с 1, 7 только с 2, и так же 6+3, 5+4. Это один способ.

   Пусть $S = 15$. Тогда 9 идёт вместе с числами, в сумме дающими 6, и варианты такие:

   а) 9+6

   б) 9+5+1

   в) 9+4+2

   г) 9+3+2+1

   Для каждого случая смотрим на группу, куда входит 8. Если эта вторая группа сформирована, то третья определена однозначно. Число 8 идёт с суммой, равной 7, и это либо 7, либо 6+1, либо 5+2, либо 4+3, либо 4+2+1.

   Для а) подходят 4 из этих случаев (кроме 6+1), для б) и в) по 2 случая, для г) всего один случай (только 7). Итого 4+2+2+1=9. Вместе с одним случаем для $S = 9$ получается итоговый ответ 10.

2. Предположим, что $ac \leq 1$. Тогда у уравнения $f(x) = x$, записанного в виде $ax^2 - 2x + c = 0$, имеются корни, поскольку приведённый дискриминант $D/4 = 1 - ac$ неотрицателен. Из $f(x) = x$ следует, что $f(f(x)) = f(x) = x$, то есть эти корни были бы решениями того уравнения, у которого их быть не должно по условию. Это доказывает, что $ac < 1$.

3. Ответ: 50.

   Рассмотрим точку B', симметричную B относительно диаметра, перпендикулярного хорде AC. Треугольники ABC и $CB'A$ равны, поэтому площади $ABCD$ и $AB'CD$ тоже равны.

   Дуги BC и CD были равны, так как на них опирались равные вписанные углы. Теперь у нас равны дуги AB' и CD. Отсюда следует, что $AD \parallel B'C$, то есть перед нами равнобочная трапеция. Её площадь не превосходит половины произведения диагоналей, каждая из которых равна $AC = 10$. Значит, площадь не превосходит 50. Поскольку построение с перпендикулярными диагоналями возможно (случай, когда $ABCD$ — квадрат), это значение может достигаться, то есть оно является максимальным возможным.

4. Каждому слагаемому сопоставим столбик из клеток соответствующей высоты. Расставим столбики слева направо по невозрастанию. Для числа 800 их станет 299. Приставим слева столбик высотой 200. Тогда столбиков станет 300, невозрастание сохранится, а площадь фигуры из клеток станет равна 1000.

   Перевернём фигуру симметрично относительно биссектрисы прямого угла (с вершиной слева внизу). Получится фигура из 200 столбиков той же площади, с тем же свойством невозрастания. Крайний слева столбик имеет высоту 300. Если его удалить, то мы получим представление числа 700 в виде суммы 199 невозрастающих чисел, каждое из которых не больше 300.

   Тем самым, мы установили взаимно-однозначное соответствие между теми и другими способами представления. Отсюда следует, что количества одинаковы.

5. Ответ: либо числа равны 1, либо $4, 4, -5$.

   Рассмотрим систему уравнений $x + y + z = 3$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Заметим, что $x^3+y^3 = (x+y)^3-3(x+y)xy$, откуда $3-z^3 = (3-z)^3-3(3-z)xy$. Раскрывая скобки и упрощая, приходим к равенству $xy = -3z+\frac{8}{3-z}$ (деление на $3-z$ возможно, так как из уравнения видно, что $z \neq 3$). Тем самым оказывается, что $3-z$ делит 8, то есть равно $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$. Значениям $x+y = 3-z = 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8$ по формуле соответствуют значения $xy = 2, 1, 5, 16, -20, -19, -23, -34$ соответственно.

   Для каждой пары значений $x + y$ и xy можно рассмотреть соответствующее квадратное уравнение. Дискриминанты этих уравнений равны $D = (x + y)^2 - 4xy$ и принимают соответственно значения $-7, 0, -4, 0, 81, 80, 108, 200$. Целочисленные решения получаются только в трёх случаях (дискриминант должен быть квадратом целого числа). В первом из таких случаев $x + y = 2$, $xy = 1$, откуда $x = y = 1$. При этом $z = 1$. Во втором случае $x + y = 8$, $xy = 16$, откуда $x = y = 4$, $z = -5$. Наконец, в третьем случае $x + y = -1$, $xy = -20$, то есть x, y — это числа -5 и 4. При этом $z = 4$. Это даёт все перечисленные выше решения.