Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

6 КЛАСС

1. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. A, B и C — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. A и B сказали следующее.

   A: «B по рангу выше, чем C.»

   B: «C по рангу выше, чем A.»

   Что ответил C на вопрос: «Кто выше по рангу — A или B?»

2. Длину прямоугольника увеличили в полтора раза. На сколько процентов нужно уменьшить его ширину, чтобы в итоге площадь прямоугольника увеличилась на 5%?

3. Имеется 10 компьютеров. Любые два из них соединены кабелем либо красного, либо синего цвета. Всегда ли можно выбрать один из этих двух цветов так, чтобы с помощью кабелей только этого цвета любой из десяти компьютеров мог соединиться с любым из остальных (возможно, через промежуточные компьютеры)?

4. Можно ли придумать такое трёхзначное число, что при перестановках его цифр получатся трёхзначные числа, при делении на 7 дающие в остатке все значения от 1 до 6?

5. Сумма квадратов трёх натуральных чисел оканчивается нулём. Верно ли, что их произведение тоже оканчивается нулём?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

7 КЛАСС

1. В некоторой компании из 5 человек каждый является или рыцарем, или лжецом. Рыцари всегда сообщают правду, лжецы всегда говорят неправду. Известно, что рыцари среди них точно имеются. Участникам выдели номера от 1 до 5. Каждый из них написал на бумажке ответ на вопрос, чему равняется сумма номеров всех рыцарей. Затем бумажки перемешали, и оказалось, что на них были написаны числа 8, 8, 9, 10, 10. Можно ли по этим данным точно установить, кто рыцарь, а кто лжец?

2. В одном сосуде 100 литров воды, а другой — пустой. Половину воды перелили из первого сосуда во второй. Затем из второго сосуда перелили половину воды в первый и т. д. На каждое переливание затрачивают одну минуту. Через сколько минут количество воды во втором сосуде впервые будет отличаться от удвоенного количества воды в первом сосуде не более, чем на один литр?

3. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?

4. Имеется 12 компьютеров. Любые два из них соединены кабелем одного из трёх цветов: красного, синего или жёлтого. Всегда ли можно выбрать один из этих трёх цветов так, чтобы с помощью кабелей только этого цвета любой из двенадцати компьютеров мог соединиться с любым из остальных (возможно, через промежуточные компьютеры)?

5. Существуют ли четырёхзначные числа, состоящие из попарно различных ненулевых цифр, у которых никакая перестановка цифр не приводит к появлению числа, кратного 7?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

8 КЛАСС

1. В некоторой компании из 5 человек каждый является или рыцарем, или лжецом. Рыцари всегда сообщают правду, лжецы всегда говорят неправду. Известно, что рыцари среди них точно имеются. Каждый рыцарь задумал число 1, каждый лжец задумал число 2, о чём всем стало известно. Далее прозвучало 5 заявлений: участники друг за другом последовательно заявили, что сумма всех загаданных чисел равна 8, 7, 6, 7, 8. Можно ли по этим данным точно установить, кто рыцарь, а кто лжец?

2. Найти наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы шести различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

3. Алла и Борис по очереди берут конфеты из коробки. За один ход каждый из них может взять одну, две или три конфеты, но не может при этом повторить последний ход соперника. Всего в коробке 200 конфет. Проиграет тот, кто не сможет сделать очередной ход. Сможет ли Алла обеспечить себе победу, если она начинает игру первой?

4. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найти угол CBK.

5. Положительные числа a, b таковы, что $ab = 1$. Доказать при этих условиях неравенство
$$\frac{a}{a^2+3} + \frac{b}{b^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

9 КЛАСС

1. В компании из семи человек каждый является либо рыцарем, и всегда говорит правду, либо лжецом, и всегда говорит неправду. Известно, что рыцарями являются не все участники. Первый из членов компании сказал, что число лжецов делится на 1, второй сказал, что оно делится на 2, третий — что делится на 3, и так далее, и седьмой сказал, что оно делится на 7. Можно ли по этой информации однозначно определить, кем является третий участник — рыцарем или лжецом?

2. Найти количество натуральных решений уравнения
$$\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{11}\right] + 1,$$
где квадратные скобки означают целую часть числа.

3. Двое играют в такую игру. На экране компьютера изображена клетчатая таблица размером 20×17. Справа от каждой строки имеется маленькая красная кнопочка. Также снизу от каждого столбца имеется по такой же кнопочке. За один ход разрешается нажать курсором либо на кнопочку справа, и тогда исчезает одна строка, либо на кнопочку снизу, и тогда исчезнет один столбец. Побеждает тот, кто сделал в игре последний из ходов.

   Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

4. В сегмент круга, дуга которого имеет угловую величину $120°$, вписан квадрат со стороной $\sqrt{19} - 2$. Найти радиус круга.

5. Решить уравнение
$$(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35.$$

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

10 КЛАСС

1. Десять человек пришли в гости в головных уборах. Через какое-то время они начали уходить домой по одному. Каждый человек, уходя, надевал любой головной убор, который налезал на его голову. Если такого не находилось, то человек уходил без головного убора. Чему равно наибольшее число гостей, которое могло уйти без головного убора? (Предполагается, что размеры голов у всех были разные.)

2. Из сосуда, наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Наконец, опять после перемешивания отлили литр смеси и долили литр воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в семь раз больше по объему оставшегося в нем глицерина. Каков объем сосуда?

3. Существует ли треугольник с целочисленными сторонами, площадь которого равна $10\sqrt{2}$?

4. Найти наименьшее значение выражения
$$\sqrt{(b-3)^2+(a-2b-2)^2}+\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}+\sqrt{(a-7)^2+(b-3)^2}.$$

5. Две окружности радиусов 1 и 4 касаются друг друга внутренним образом. Найти радиус окружности, касающейся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через их центры.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

6 класс (решения)

1. Ответ: C ответил, что B выше A.

   Допустим, что A рыцарь. Тогда он сказал правду, то есть порядок жителей по рангу имеет вид ABC. В этом случае C лжец, и он должен поставить B выше A.

   Пусть A не рыцарь. Предположим, что рыцарем является B. Он поставил C выше A, и это правда, то есть порядок имеет вид BCA. Но тогда A лжец, и он не мог сказать, что B выше C. Значит, в этом случае только C может быть рыцарем. При этом получается, что B сказал правду, то есть он не лжец, и лжецом является A. При этом рыцарь C в ответе на вопрос должен поставить B выше A, как и в предыдущем случае.

   Из этого рассуждения также следует, что B – обычный человек.

2. Ответ: на 30%.

   Увеличение на 5 процентов – это умножение на коэффициент 1,05. Длина увеличилась в полтора раза, то есть умножилась на 1,5. Тогда ширина должна умножиться на 1,05:1,5=0,7. Это значит, что произошло уменьшение ширины на 30 процентов (вместо 100 стало 70).

3. Ответ: да, всегда.

   Количество компьютеров здесь роли не играет. Будем их последовательно объединять в сеть, используя кабели лишь одного из цветоа.

   Если компьютеров два, то они соединены кабелем какого-то цвета. Его мы и выбираем.

   Рассмотрим третий компьютер. Он либо соединён кабелем того же цвета хотя бы с одним из предыдущих, и тогда мы из них строим сеть с кабелями данного цвета. Либо третий компьютер соединён с каждым из предыдущих кабелями противоположного цвета. Тогда от предыдущей сети отказываемся, меняя цвет. Три компьютера будут в итоге соединены в сеть при помощи кабелей одного цвета.

   Дальше рассматриваем четвёртый компьютер, и рассуждаем аналогично. Он либо соединён кабелем того же цвета хотя бы с одним из предыдущих, и тогда мы из них строим сеть с кабелями данного цвета. Либо четвёртый компьютер соединён с каждым из предыдущих кабелями противоположного цвета. Тогда от предыдущей сети отказываемся, меняя цвет. Четыре компьютера будут в итоге соединены в сеть при помощи кабелей одного цвета.

И так далее, применяя описанный процесс, постепенно приходим к сети из 10 компьютеров.

4. Ответ: да, можно.

   Все цифры числа должны быть разные, и среди них нет нулей. Первое такое число — это 123. Начинаем его проверять. Оказывается, что оно не подходит, так как 231 делится на 7 нацело, то есть даёт в остатке 0. Пробуем следующее число 124. Перестановки его цифр 124, 142, 214, 241, 412, 421 при делении на 7 дают в остатке 5, 2, 4, 3, 6, 1 соответственно, то есть такое число нам подходит.

5. Ответ: да, верно.

   Сумма квадратов трёх чисел делится на 2 и на 5. Значит, среди чисел имеются чётные. Поэтому произведение делится на 2.

   Прослеживая по таблице умножения, на какие цифры может оканчиваться один из квадратов, мы получаем варианты 0, 1, 4, 5, 6, 9. При делении на 5 в остатке получается 0, 1 или 4. Если сложить три числа с такими значениями без участия нуля, то может получиться 1+1+1, или 1+1+4, или 1+4+4, или 4+4+4. Ни в одном из случаев сумма остатков не делится на 5. Значит, остаток 0 где-то должен встречаться. Это значит, что хотя бы одно из трёх наших чисел делится на 5. Тогда и произведение делится на 5.

   Мы пришли к выводу, что произведение делится и на 2, и на 5. Поэтому оно делится на 10, то есть оканчивается нулём.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Одно из значений 8, 9, 10 должно быть правдивым, так как рыцари есть. При этом правдивое значение дали рыцари и только они. Если это 8, то рыцарей ровно два. Если 10, то тоже два. Если 9, то рыцарь один. Тут сразу видно, что последний случай неовзможен. Также ясно, что сумма номеров двух рыцарей не больше 9. Значит, 10 быть не могло, и сумма равна 8. Это может быть только для чисел 3 и 5. Значит, обладатели номеров 3 и 5 — рыцари, и именно они дали ответ 8. А все остальные, под номерами 1, 2, 4 — это лжецы, и их ответы правдой не являются.

2. Ответ: через 7 минут.

   При желании, здесь можно весь процесс пронаблюдать напрямую, то есть проделать все 7 шагов.

   Можно заметить следующее. Через минуту количество воды в первом и втором сосуде равно 50 и 50, и $2 \cdot 50 - 50 = 50$, то есть удвоенное количество воды в первом сосуде отличается на 50 от количества во втором сосуде. Что будет ещё через две минуты? Легко проверить, что в сосудах будет $75/2$ и $125/2$, и интересующая нас величина составит $75 - 125/2 = 25/2$, то есть она в 4 раза уменьшится.

   Это действительно так, потому что если было $100-x$ и x, и переливать надо в первый сосуд, то через минуту станет $100-x/2$ и $x/2$. Ещё через минуту, после переливания во второй сосуд, будет $50-x/4$ и $50+x/4$. Сравним две величины: $2(100 - x) - x = 200 - 3x$; $2(50 - x/4) - (50 + x/4) = 50 - 3x/4$. Произошло уменьшение в 4 раза. Тогда после пяти минут от начала интересующая нас разница составит $25/8$, а после семи будет $25/32$, что меньше одного литра.

3. Ответ: 9 клеток.

   Доску можно разбить на 9 квадратиков 2×2. В каждом из них любые две клетки соприкасаются. Закрашено из них не более одной. Значит, закрашенных клеток не больше 9. При этом 9 клеток закрасить легко: выбираем левую нижнюю клетку в каждом из указанных квадратиков 2x2.

4. Ответ: нет, не всегда.

   Разобьём 12 компьютеров на три группы A, B, C по 4 компьютера в каждой. Раскрасим в красный цвет все соединения между компьютерами внутри A, а также между компьютерами из B и C. Ясно, что при помощи красного цвета не каждый компьютер может связаться с каждым. Далее, аналогично раскрасим в синий цвет все соединения типа B-B и A-C, а в жёлтый цвет — соединения типа C-C и A-B. Ни один из трёх цветов при такой схеме соединений не позволяет каждому из компьютеров связаться с каждым.

5. Ответ: да, существуют.

   Пример числа из условия находится подбором. Для начала можно временно отменить одно из условий, и рассмотреть числа, в которых цифра 1 встречается два раза. Это уменьшает количество перебираемых вариантов. Далее можно одну из цифр 1 заменить на 8, и при этом ничего не изменится.

   Простейший случай имеет вид 1123. Здесь возможно 12 разных перестановок чисел, каждая из которых в принципе проверяется вручную. Чтобы облегчить перебор, можно поступить так.

   Пусть число имеет вид $\overline{abcd}$. Тогда оно равно $1000a + 100b + 10c + d$. Поскольку речь идёт о делимости на 7, коэффициенты можно заменить на их остатки от деления на 7, то есть на 6, 2 и 3. По той же причине, вместо 6 можно брать -1. Таким образом, получается условие, что $-a + 2b + 3c + d$ не кратно 7.

   Перебираем 6 случаев, когда 1 встречается на местах 1,2, затем 1,3, затем 1,4, далее 2,3, потом 2,4, и в конце 3,4. Это всего 6 случаев. Выражение из предыдущего абзаца при этом равно $1 + 3c + d$, $2 + 2b + d$, $2b + 3c$, $5 - a + d$, $3 - a + 3c$, $4 - a + 2b$ соответственно. В каждом из этих вариантов две переменные полагаем равными 2 и 3 в том или другом порядке, и убеждаемся, что делимости на 7 нигде не появится.

   Таким образом, примером нужного нам числа будет 1238. Есть и другие примеры, но это обнаружить легче всего.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

8 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Количество рыцарей в компании может принимать значения от 1 до 5. Если их было k, то сумма загаданных всеми участниками чисел равна $k+2(5-k) = 10-k$. Сделанные заявления равносильны тому, что рыцарей в компании 2, 3, 4, 3, 2 соответственно. Но три или четыре рыцаря дали были 3 или 4 одинаковых правдивых ответа. Значит, рыцарей могло быть только два. Тогда сумма чисел равна 8, и получается, что правду сказали первый и пятый. Они и являются рыцарями, а остальные — лжецами.

2. Ответ: 165.

   Нужно определить, чему должна быть равна сумма цифр у всех слагаемых. Идея в том, что если она слишком мала, то двузначных чисел с такой суммой будет мало, и придётся брать трёхзначные, в результате чего общая сумма станет большой. Если же, напротив, сумма цифр слагаемых слишком велика, то это даст увеличение значения суммы.

   Чтобы обойтись не более чем двузначными числами, рассмотрим слагаемые с суммой 5. Шесть наименьших из них в сумме дадут $5+14+23+32+41+50 = 165$. Вариант с суммой 4 даёт $4 + 13 + 22 + 31 + 40 + 103$, и результат явно больше. При уменьшении с 4 до 3 и далее, придётся задействовать как минимум два трёхзначных числа, и общая сумма превысит 200.

   Если идти в сторону увеличения суммы цифр слагаемых и брать 6, то получится $6 + 15 + 24 + 33 + 42 + 51$. Здесь также 1 однозначное слагаемое и 5 двузначных. Простое почленное сравнение этого варианта с рассмотренным в начале, показывает, что сумма только растёт.

3. Ответ: нет, не сможет.

   Начнём анализировать игру с самого начала, выписывая все выигрышные ходы в данной позиции. Их будем указывать в скобках после количества конфет в исходной позиции. Это даёт такой список: 1 (1), 2 (2), 3 (3), 4 (2), 5 (), 6 (1,2,3), 7 (2), 8 (3), 9 (2), 10 () и так далее. Для каждого очередного числа по уже имеющейся информации мы перебираем три варианта и смотрим, какие из них ведут к выигрышу. Например, легко видеть, что при 5 конфетах проигрывает любой из ходов, а при 6 конфетах любой ход выигрывает (скажем, ход 2 ведёт к позиции 4, но там выигрывает только 2, а повторять предыдущий ход нельзя).

Если мы продолжим список дальше, то по описанному принципу получаем следующее: 11 (1,2,3), 12 (2), 13 (3), 14 (2), 15 (), и здесь уже становится видно, что периодическим с периодом 5 оказывается не только исход игры, но и набор допустимых выигрывающих ходов – поскольку всё однозначно зависит от данных для трёх предыдущих чисел. Отсюда делаем вывод, что начинающий выигрывает тогда и только тогда, когда число конфет не делится на 5.

Таким образом, Алла не может обеспечить себе победу при правильной игре Бориса. Тот должен на 1 ответить 2, на 2 ответить 3, и на 3 ответить 2. В двух последних случаях число конфет изменяется на 5. А в первом случае получается $5k+2$ конфеты, и 2 брать нельзя. На взятие одной конфеты берём одну, и у противника получается кратное 5. На взятие трёх конфет берём 2, и получается число $5(k-1)+2$, где снова нельзя брать 2 конфеты, и так далее.

4. Ответ: 15 градусов.

   Ясно, что $BK = DK$, так как точка K лежит на серединном перпендикуляре к BD. Треугольник BKD является равносторонним, так как все его стороны равны по длине диагонали квадрата. Следовательно, на угол DBK приходится 60 градусов, угол DBC равен 45 градусам, и тогда на CBK приходится $60 - 45 = 15$ градусов.

5. Применим неравенство $a^2 + 1 \geq 2a$, которое равносильно очевидному неравенству $(a-1)^2 \geq 0$. Отсюда следует, что знаменатель первой из дробей не меньше $2(a+1)$. Аналогично, знаменатель второй из дробей не меньше $2(b+1)$. Тогда сумма дробей в левой части неравенства не превосходит

$$\frac{a}{2(a+1)} + \frac{b}{2(b+1)} = \frac{a(b+1)+b(a+1)}{2(a+1)(b+1)} = \frac{a+b+2}{2(a+b+2)} = \frac{1}{2}$$

   с учётом равенства $ab = 1$.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Пусть число лжецов среди членов компании равно $k \geq 1$. Обозначим через $\tau(k)$ количество натуральных делителей k. Правдивый ответ дадут ровно $\tau(k)$ участников — обладатели тех номеров, на которые делится количество лжецов. Это рыцари, а остальные лжецы в количестве k, поэтому выполняется равенство $k + \tau(k) = 7$. Для чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 количество делителей равно 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2 соответственно. В сумме будет 2, 4, 5, 7, 7, 10, 9. Подходят два случая: когда лжецов 4 или 5, а рыцарей, соответственно, 3 или 2. В первом случае рыцарями будут обладатели номеров 1, 2, 4, а остальные – лжецы. Во втором случае рыцарями будут обладатели номеров 1 и 5. В обоих случаях, третий участник является лжецом.

2. Ответ: 110.

   Пусть $[x/11] = k$. Тогда $11k \leq x < 11(k+1)$. При этом $[x/10] = k+1$, откуда $10(k+1) \leq x < 10(k+2)$.

   Получилась система из двух неравенств: $11k \leq x \leq 11k+10$ и $10k+10 \leq x \leq 10k+19$. Найдём число решений этой системы в натуральных числах при каждом целом неотрицательном k.

   Для начала предположим, что решений у неё нет. Тогда $10k+19 < 11k$, так как неравенство $11k+10 < 10k+10$ невозможно. Это значит, что $k \geq 20$. Значит, решений могут быть только при $0 \leq k \leq 19$. Сравнивая левые и правые концы отрезков, разбираем два случая.

   1) При $0 \leq k \leq 9$ имеют место неравенства $11k < 10k+10 \leq 11k+10 \leq 10k+19$. В пересечении получается отрезок $[10k+10; 11k+10]$, в котором $k+1$ натуральное число. Суммируем числа от 1 до 10, получаем 55 решений.

   2) При $10 \leq k \leq 19$ имеют место неравенства $10k+10 \leq 11k \leq 10k+19 < 11k+10$. В пересечении получается отрезок $[11k; 10k+19]$, в котором $20-k$ натуральных чисел. Суммируем числа от 10 до 1, получаем ещё 55 решений.

   Итого имеем 110 решений.

3. Ответ: тот, кто ходит первым.

При одном ходе уменьшается на единицу или число строк, или число столбцов. Игра равносильна следующей: имеются две кучки, в которых m и n камней. За один ход разрешается брать один камень из какой-то одной кучки. Игра заканчивается, когда одна из кучек опустела. Выиграл тот, кто сделал последний ход.

Очевидно, что при $m = 1$ или $n = 1$ побеждает начинающий. При $m, n \geq 2$ начинающий побеждает, если числа разной чётности, и проигрывает, если они одинаковой чётности. Стратегия состоит в том, чтобы оставлять противнику проигранную позицию. Проверим, что это так.

Если m и n одной чётности, и $m, n \geq 2$, то после хода получатся числа разной чётности, и тогда противник победит. Если же числа были разной чётности, и хотя бы одно из них равно 1, то победа достигается за один ход. При $2 \leq m < n$ разной чётности, уменьшаем n на единицу, и противник получает проигранную позицию.

4. Ответ: 5.

   Пусть R – радиус, $a = \sqrt{19} - 2$ — сторона квадрата. Расстояние от центра окружности до хорды равно $R/2$. Тогда $R/2 + a$ есть расстояние от центра до дальней стороны квадрата. Рассмотрим одну из вершин этой стороны. Она удалена от центра на расстояние R, и от диаметра, перпендикулярного этой стороне, на расстояние $a/2$. Тогда теорема Пифагора даёт соотношение $R^2 = (R/2 + a)^2 + (a/2)^2$, из которого $3R^2 - 4Ra - 5a^2 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно R, находим приведённый дискриминант $D/4 = 19a^2$ и положительный корень $R = \frac{a(\sqrt{19}+2)}{3} = \frac{(\sqrt{19}-2)(\sqrt{19}+2)}{3} = \frac{19-4}{3} = 5$.

5. Ответ: уравнение имеет два действительных корня $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$.

   Раскроем скобки в двух произведениях. Получится $(36x^2 + 60x + 25)(3x^2 + 5x + 2) = 35$. Это подсказывает, что можно сделать замену $y = 3x^2 + 5x + 2$. При этом возникнет уравнение $(12y + 1)y = 35$, то есть $12y^2 + y - 35 = 0$. Дискриминант равен $D = 1681 = 41^2$, а корнями будут $y = \frac{5}{3}$ и $y = -\frac{7}{4}$.

   Для этих случаев рассматриваем квадратные уравнения, которые имеют вид $3x^2 + 5x + \frac{1}{3} = 0$ и $3x^2 + 5x + \frac{15}{4} = 0$. Первое имеет два корня $x = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$, а у второго корней нет ввиду отрицательности дискриминанта.

Областная олимпиада по математике на приз губернатора области

2017 – 2018 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: 5 гостей.

   Если обладатели пяти самых маленьких голов наденут головные уборы обладателей пяти самых больших голов, то далее эти пять обладателей не смогут надеть маленькие головные уборы и будут вынуждены уйти без них.

   Докажем, что 6 человек уйти без головного убора не могло. В противном случае уходит с непокрытой головой хотя бы один из первой половины меньших по размеру голов. Ему не хватило головного убора, поэтому все головные уборы его собственного размера, а также больших размеров, уже унесены. А это значит, что 6 человек уже ушли с головными уборами, то есть без головных уборов в этом случае уйдёт не более четырёх гостей.

2. Ответ: 2 литра.

   Пусть объём сосуда равен V. Рассмотрим случай одного переливания. После отливания одного литра, вместо объёма V становится $V-1$ литров смеси, то есть общее количество умножается на коэффициент $\frac{V-1}{V} = 1 - \frac{1}{V}$. Ввиду перемешивания, на этот же коэффициент умножается количество глицерина в смеси. Далее после доливания воды оно не меняется.

   Изначально глицерина было V, а после трёх переливаний и трёх умножений на $1 - \frac{1}{V}$ оно стало равно $\frac{1}{8}V$. Отсюда получается уравнение $V(1 - \frac{1}{V})^3 = \frac{1}{8}V$, то есть $1 - \frac{1}{V} = \frac{1}{2}$, и $V = 2$ литрам.

3. Ответ: да, существует.

   Площадь треугольника выражается через его стороны по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

   В данном случае мы получаем уравнение $p(p-a)(p-b)(p-c) = 200$. Заметим, что сумма трёх последних сомножителей равна первому: $p - a + p - b + p - c = 3p - (a+b+c) = p$. Это значит, что мы имеем дело с уравнением вида $(x+y+z)xyz = 200$ в натуральных числах. Здесь мы не ставим себе целью описание всех решений, поэтому достаточно найти какое-нибудь. Загадывая возможное значение для произведения, мы имеем подходящее значение для суммы и смотрим, может ли так быть. Если рассмотреть случай $xyz = 20$ и $x+y+z = 10$, то видно, что подходят числа 5, 4, 1. При этом $p = 10$, а стороны равны $10 - 5 = 5$, $10 - 4 = 6$, $10 - 1 = 9$. Треугольник с такими сторонами существует, и он подходит.

4. Ответ: $5\sqrt{5}$.

   Здесь надо применить геометрический подход. Каждое из трёх слагаемых суммы есть расстояние между какими-то двумя точками на плоскости. Последнее есть расстояние между $C(a,b)$ и $D(7,3)$. Предпоследнее — расстояние между $B(-b, 2b-a)$ и C. Наконец, первое есть расстояние между $A(-3,-2)$ и B. Поэтому нам нужно минимизировать сумму расстоний $AB+BC+CD$, которая не превосходит $AD=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$.

   Это минимальное значение достигается, если точки лежат на одной прямой именно в таком порядке: A, B, C, D. Уравнение прямой AD имеет вид $y=\frac{x-1}{2}$. Подставляя в него координаты точек B и C, имеем $4b-2a=-b-1$ и $2b=a-1$. Решая систему, имеем $a=3$, $b=1$. Абсциссы точек A, B, C, D равны $-3<-1<3<7$ соответственно, откуда следует, что найденное нами значение суммы расстояний является наименьшим.

5. Ответ: $48/25$.

   Обозначим центры окружностей радиусом 1 и 4 через O_1 и O_2 соответственно. Пусть O – центр третьей окружности; x – её радиус. Тогда $OO_1=x+1$, $OO_2=4-x$, $O_1O_2=3$, и длина высоты, опущенной из O на O_1O_2, также равна x.

   Применяя теорему Пифагора, можно составить уравнение $\sqrt{(x+1)^2-x^2}+\sqrt{(4-x)^2-x^2}=3$, то есть $\sqrt{2x+1}+\sqrt{16-8x}=3$. Оно несложно решается при помощи возведений в квадрат, что приводит к условию $25x^2=48x$. Поскольку $x>0$, получается $x=48/25$. При проверке это значение подходит.